

Über die Greenschen Funktionen des Zylinders und der Kugel

Von WALTER FRANZ

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Münster i. W.

(Z. Naturforschg. 9 a, 705—716 [1954]; eingegangen am 15. März 1954)

Die Kugelfunktions-Reihen für die Greenschen Funktionen werden der Watson-Transformation unterworfen, dabei jedoch ein der geometrisch-optischen Welle entsprechendes Integral abgespalten. Auf diese Weise erhält man, abgesehen von einer nunmehr genauen Bestimmung der Koeffizienten, gerade die früher von Deppermann und dem Verf. (für den Spezialfall einer ebenen Primärwelle) angegebene Aufspaltung in einen geometrisch-optischen und einen Kriechwellen-Anteil, und damit eine bis zu ziemlich kleinen Objekten bequem zu handhabende semi-asymptotische Lösung des Beugungsproblems. Die Kriechwellen erweisen sich identisch mit den in der Theorie der drahtlosen Telegraphie wichtigen Residuenwellen nach Watson und Van der Pol-Bremmer. — Die mittels der Watson-Transformation bestimmten Erregungsstärken der Kriechwellen lassen sich auf beliebig gekrümmte Flächen übertragen; dies gestattet eine semi-asymptotische Behandlung der Beugung am beliebigen (kantenfreien) Objekt mittels der Integralgleichungsmethode.

Um die Beugung von Schall und elektromagnetischen Wellen an großen Zylindern oder Kugeln zu berechnen, bedient man sich bis jetzt zweier verschiedener Methoden: entweder man ermittelt die in der Umgebung der geometrisch-optischen Glanzstelle der Oberfläche reflektierte Strahlung mittels der Kirchhoffsschen Beugungsformel oder man verwandelt die strenge Reihenentwicklung der Greenschen Funktion nach Bessel-Funktionen in ein Integral, und dieses nach Watson¹ in eine Residuensumme über die Nullstellen der Hankel-Funktionen bzw. ihrer Ableitungen oder einer geeigneten Linearkombination. Die letzte Methode hat den Nachteil, daß die Summe über die „Residuenwellen“ (s. Bremmer²) nur dann praktisch brauchbar ist, wenn die Lichtquelle für den Beobachter geometrisch unsichtbar bleibt — im anderen Fall werden die aufeinanderfolgenden Residuenwellen zu Anfang der Reihe exponentiell größer. Die Anwendung der geometrischen Näherung andererseits hat gerade im Fall einer geometrisch sichtbaren Lichtquelle Sinn, jedoch liefert sie nicht die praktisch bei nicht allzu großen Objekten auftretenden Maxima und Minima der Intensität als Funktion des Abstands oder des Winkels. Eine Brücke zwischen den beiden erwähn-

ten Methoden wird durch die „semi-asymptotische“ Entwicklung geschlagen, welche von Deppermann und mir angegeben wurde³. Sie ergibt einerseits im Schatten in Gestalt unserer „Kriechwellen“ genau die Watson-Bremmerschen Residuenwellen, im Licht die geometrisch-optische Näherung zuzüglich der aus der Schattenseite in die Lichtseite des Objekts hinübergewechselten Kriechwellen. Daß die Berücksichtigung der Residuenwellen *neben* der geometrischen Welle im geometrisch beleuchteten Gebiet nicht etwa eine inkonsequente Näherung ist, soll in der folgenden Untersuchung gezeigt werden; wir werden dabei den exakten Ausdruck für die Greenschen Funktionen streng in zwei Summanden zerlegen, deren einer asymptotisch der geometrisch-optischen Näherung ohne die erwähnten Maxima und Minima entspricht, während der andere die Kriechwellen liefert. Für den Schattenraum erhalten wir in dieser Weise genau die von Sommerfeld⁴ angegebene Gestalt der Greenschen Funktion, während wir im Lichtraum die dort praktisch unbrauchbare Sommerfeldsche Darstellung durch eine andere ersetzen, deren Brauchbarkeit wir bereits in I durch die Erklärung der bei den Limbachschen Messungen am Zylinder auftretenden Maxima und Minima erwiesen haben⁵.

¹ G. N. Watson, Proc. Roy. Soc. A **95**, 83, 546 [1919].

² H. Bremmer, Terrestrial radio waves, Elsevier Publ. Comp. 1949.

³ W. Franz u. K. Deppermann, Ann. Phys. **10**, 361 [1952] (als I zitiert).

⁴ A. Sommerfeld, Vorlesungen, Bd. VI, Leipzig 1947; s. Kap. V, Anh. 2.

⁵ Nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit erschien ein Aufsatz von Isao Imai⁶, in welchem für

die Beugung der ebenen Welle am Zylinder dieselbe Darstellung mittels der Watson-Transformation neu hergeleitet wird. Seine Formeln stimmen mit unseren Ergebnissen überein, jedoch sind die numerischen Werte in (7. 8), (7. 18), (7. 22), (8. 16) fehlerhaft, s. unsere Tab. 1 und 2. — Zusatz b. d. Korr.: Im Gegensatz zu Imai möchten wir betonen, daß auch unsere frühere Herleitung deduktiv, und nicht „unter Rückgriff auf physikalische Überlegungen“ gewonnen



Um die Grundgedanken der folgenden Darstellung klar zu zeigen, werden wir zunächst einen besonders einfachen Fall behandeln, nämlich die Erregung in der Oberfläche eines schallweichen Zylinders infolge einer einfallenden ebenen Primärwelle. In den späteren Abschnitten werden dann die allgemeinen Greenschen Funktionen für Zylinder und Kugel angegeben.

1. Erregung auf beugendem schallweichen Zylinder

Wir führen Zylinderkoordinaten ϱ, φ ein. Aus der Richtung $\varphi=0$ möge primär eine ebene Welle

$$u_0 = e^{-ik\varrho \cos \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{-m} e^{im\varphi} J_m(k\varrho) \quad (1)$$

einfallen. k bedeutet die Wellenzahl $2\pi/\lambda$. Wegen der in (1) mitangegebenen Entwicklung der ebenen Welle nach Bessel-Funktionen (s. Magnus-Oberhettinger⁷ S. 27) lautet die Lösung des Beugungsproblems mit der Randbedingung $u=0$ bei $\varrho=a$

$$u = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{-m} \cdot e^{im\varphi} \left(J_m(k\varrho) - \frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} H_m^{(1)}(k\varrho) \right). \quad (2)$$

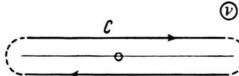
Des weiteren soll uns in diesem Abschnitt nur die Normalableitung der Erregung in der Oberfläche selbst beschäftigen, also nach (2)

$$\frac{\partial u}{\partial n}(a) = \frac{2}{i\pi a} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\varphi-\pi/2)} \cdot \frac{1}{H_m^{(1)}(ka)}. \quad (3)$$

Hierin wurde benutzt, daß die Wronskische Determinante der beiden Hankel-Funktionen $H_m^{(2)}(ka)$, $H_m^{(1)}(ka)$ gleich $4/i\pi ka$ ist. Gl. (3) läßt sich in bekannter Weise als Residuensumme des folgenden Integrals auffassen:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(a) = \frac{1}{\pi a} \int_C \frac{dv}{\sin v\pi} \cdot \frac{\exp [iv(\varphi-3\pi/2)]}{H_v^{(1)}(ka)}. \quad (4)$$

Abb. 1. Integrationsweg C für die Summation der Zylinderfunktionen.



Der Integrationsweg C umläuft die reelle Achse (s. Abb. 1). Führt man in dem unterhalb der reellen

wurde; diese heuristischen Überlegungen dienten lediglich zur Auffindung des Lösungsweges (auch für Imai und unsere Rechnung mittels der Watson-Transformation!) und Lösungsansatzes, um dann nachzuweisen, daß die Ansätze zur Befriedigung der Integral-

Achse verlaufenden Teil des Integrationswegs $-v$ als neue Variable ein, so erhält man wegen $H_{-\nu}^{(1)} = e^{i\pi\nu} H_\nu^{(1)}$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(a) = \frac{2}{\pi a} \int_D \frac{dv}{\sin v\pi} \cdot e^{-i\frac{v\pi}{2}} \cdot \frac{\cos v(\varphi-\pi)}{H_v^{(1)}(ka)}. \quad (5)$$

Die Integration läuft nunmehr über den Integrationsweg D (Abb. 2), oberhalb der reellen Achse. Der Integrand besitzt im positiv Imaginären eine Polreihe an den Nullstellen der Hankel-Funktion $H_\nu^{(1)}(ka)$; sie verläuft rechts oberhalb des Punktes $v=ka$ in den ersten Quadranten hinein. D kann zu einem Umlauf um diese Polreihe deformiert werden,

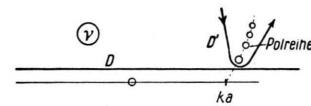


Abb. 2. Umformung des Integrationswegs in einen Umlauf um die Nullstellen der Hankel-Funktion.

da der Integrand im Unendlichen wegen des Faktors $1/H_\nu^{(1)}$ außerhalb der Polreihe stärker als eine Exponentialfunktion verschwindet. Gl. (5) läßt sich dann durch die Residuensumme an den Polen \bar{v}_l ersetzen, sofern diese konvergiert:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(a) = \frac{4i}{a} \sum_l \frac{\cos \bar{v}_l(\varphi-\pi)}{\sin \bar{v}_l\pi} \cdot \frac{\exp [-i\bar{v}_l\pi/2]}{\frac{\partial H_\nu^{(1)}(ka)}{\partial v}} / \bar{v}_l. \quad (6)$$

Da die Residuen vom $1/H_\nu^{(1)}$ sich schwächer als $1/\sqrt{v}$ verändern, hängt die Konvergenz der Summe nur davon ab, ob $\cos v(\varphi-\pi) \cdot \exp (-iv\pi/2) / \sin v\pi$ mit wachsendem Imaginärteil von v abnimmt oder nicht. Sie konvergiert dann und nur dann, wenn $|\varphi-\pi| < \pi/2$, also auf der Schattenseite des Zylinders. Auf der beleuchteten Fläche divergiert sie. Wir werden später sehen, daß bei einem in beträchtlicher endlicher Entfernung gelegenen Quellpunkt die Reihe konvergent, jedoch praktisch unbrauchbar ist, da die Glieder anfänglich stark anwachsen. — Um eine auch auf der Lichtseite brauchbare Entwicklung aufzufinden, führen wir in (5) die folgende Identität ein:

$$\cos v(\varphi-\pi) = e^{iv\pi} \cos v\varphi - i e^{iv\varphi} \sin v\pi. \quad (7)$$

gleichungen geeignet sind (wenn auch der Anschluß in der Schattengrenze schwierig ist).

⁶ Isao Imai, Z. Physik 137, 31 [1954].

⁷ Magnus-Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2. Aufl. Berlin 1948.

Dadurch entstehen zwei Summanden, von denen wir den ersten wieder in eine Residuensumme verwandeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n}(a) &= \frac{4i}{a} \sum_l \frac{\cos \bar{v}_l \varphi}{\sin \bar{v}_l \pi} \cdot \frac{\exp [i\bar{v}_l \pi/2]}{\frac{\partial H_v^{(1)}(ka)}{\partial v} / \bar{v}_l} \quad (8) \\ &+ \frac{2}{i\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \cdot \frac{\exp [iv(\varphi - \pi/2)]}{H_v^{(1)}(ka)}. \end{aligned}$$

Die Summe konvergiert diesmal, wenn $|\varphi| < 3\pi/2$, d. h. also im Lichtgebiet sowie im anschließenden Schattenbereich. Für den Schattenbereich wäre es unzweckmäßig, Gl. (8) an Stelle der viel einfacheren Gl. (6) zu benutzen, für das Lichtgebiet dagegen ist Gl. (8) angemessen. Das Restintegral ist ein exakter Ausdruck für die in der Umgebung der Glanzstelle geometrisch reflektierte Welle. Man sieht dies sofort, wenn man für die Hankel-Funktion ihre asymptotische Darstellung (s. Magnus-Oberhettinger⁷, S. 33, b1)

$$H_v^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x \sin \alpha}} \cdot e^{-i\varrho(\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) - i\frac{\pi}{4}} \quad (9) \\ (\cos \alpha = \frac{v}{\varrho})$$

einsetzt und dann das Integral in der Umgebung des bei $\alpha_s = \pi/2 - \varphi$ gelegenen Sattelpunktes auswertet:

$$\begin{aligned} \frac{2}{i\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \cdot \frac{\exp [iv(\varphi - \pi/2)]}{H_v^{(1)}(ka)} \quad (10) \\ \sim -2ik \cos \varphi \cdot e^{-ik a \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Dies ist genau die geometrische Näherung.

Die Abspaltung der Residuenwellen vor der asymptotischen (geometrisch-optischen) Auswertung der Integraldarstellung (5) ist deshalb sinnvoll und konsequent, weil sie den Sinus im Nenner des Integranden beseitigt, dessen Pole gerade auf der reellen Achse liegen, wo wir die Sattelpunkte des Integrals (10) vorfinden. Bei einer direkten asymptotischen Auswertung von (5) würden wir einen mit φ und ka fluktuierenden Fehler begehen; durch die hier vorgenommene Aufspaltung (8) bewahren wir die Residuenwellen davor, im Fehler der asymptotischen Entwicklung unterzugehen.

In dem folgenden Abschnitt wird sich herausstellen, daß die Residuenwellen identisch sind mit den Kriechwellen, welche in I für den Zylinder und in einer neueren Arbeit⁸ für die Kugel aus einer Integralgleichung abgeleitet wurden.

2. Greensche Funktion des Zylinders

Die Greensche Funktion der leeren Ebene ist

$$G_0(\varrho_1, \varrho_2, \varphi) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1 \varrho_2 \cos \varphi}) = \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} H_m^{(1)}(k\varrho_2) J_m(k\varrho_1) \quad [\varrho_2 < \varrho_1] \quad (11)$$

(s. Magnus-Oberhettinger⁷, S. 31, Gl. 3b). Für die Greensche Funktion des Zylinders erhalten wir hieraus folgenden Ausdruck:

$$G(\varrho_1, \varrho_2, \varphi) = \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} H_m^{(1)}(k\varrho_2) \left(J_m(k\varrho_1) - \frac{\Omega J_m(ka)}{\Omega H_m^{(1)}(ka)} H_m^{(1)}(k\varrho_1) \right). \quad (12)$$

Darin bedeutet Ω den Differentialoperator einer homogen-linearen Randbedingung; z. B. ist $\Omega \equiv 1$ für den schallweichen Zylinder (elektromagnetisch: $\mathfrak{E} \parallel$ Achse) und $\Omega(x)F(x) \equiv dF/dx$ für den schallharten Zylinder ($\mathfrak{H} \parallel$ Achse). Gl. (12) wollen wir wieder in ein Integral über C (Abb. 1) verwandeln. Indem wir für den in der negativen Halbebene verlaufenden Teil des Weges die neue Variable $-v$ einführen, erhalten wir ein Integral über D :

$$G = -\frac{1}{4} \int_D \frac{dv}{\sin v \pi} \cos v(\varphi - \pi) \frac{H_v^{(1)}(k\varrho_2)}{\Omega H_v^{(1)}(ka)} (\Omega H_v^{(1)}(ka) J_v(k\varrho_1) - \Omega J_v(ka) H_v^{(1)}(k\varrho_1)). \quad (13)$$

Im Anhang 1 wird gezeigt, daß der Integrand von (13) wegen der Eigenschaften der darin enthaltenen Zylinderfunktionen im Unendlichen in der positiv imaginären Halbebene stärker als exponentiell verschwindet, sofern man sich im endlichen Phasenabstand von der Polreihe der Hankel-Funktion hält. Wir dürfen daher D in einen Umlauf um diese Polreihe deformieren und die Integrale in die Summe der Residuen verwandeln, sofern sie konvergiert:

$$G = \frac{i\pi}{4} \sum_l \frac{\cos v_l(\varphi - \pi)}{\sin v_l \pi} \cdot \frac{H_{v_l}^{(1)}(k\varrho_1) H_{v_l}^{(1)}(k\varrho_2)}{\frac{\partial}{\partial v} \Omega H_v^{(1)}(ka) / v_l} \Omega H_{v_l}^{(2)}(ka). \quad (14)$$

⁸ K. Deppermann u. W. Franz, Ann. Phys. 14, 253 [1954].

Mit Hilfe der Wronskischen Determinantenbeziehung kann man an Stelle von $\Omega H_{\nu}^{(2)}(ka)$ im Zähler einen linearen Differentialausdruck von $H_{\nu}^{(1)}(ka)$ in den Nenner bringen, um etwas bequemere Ausdrücke zu erhalten (die im übrigen zu der bei Sommerfeld⁴ angegebenen Gestalt der Greenschen Funktion der Kugel analog sind); insbesondere ergibt sich für $\Omega=1$ und $\Omega(x)=d/dx$

$$\frac{i\pi}{4} H_{\nu}^{(2)}(ka) = -1/ka \cdot H_{\nu}^{(1)'}(ka), \quad (15a)$$

$$\frac{i\pi}{4} H_{\nu}^{(2)'}(ka) = +1/ka \cdot H_{\nu}^{(1)}(ka). \quad (15b)$$

Um die Konvergenz der Summe einzusehen, benützen wir, daß nach (A 7) längs der Polreihe ν die folgende Darstellung durch einen positiven Parameter t zuläßt:

$$\nu_0 \sim t \exp \left[i \frac{\pi}{2} \left(1 - \left(\log \frac{2t}{ka} \right)^{-1} \right) \right]. \quad (16)$$

Führen wir dies in die asymptotische Darstellung (A 4) ein, so erhalten wir als bestimmenden Faktor der Hankel-Funktion vom Argument $k\varrho$

$$H_{\nu}^{(1)}(k\varrho) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\log(\varrho/a)}{\log(2t/ka)} \right]. \quad (17)$$

$\partial/\partial\nu(\Omega H_{\nu}^{(1)}(ka))$ und $1/\Omega H_{\nu}^{(2)}(ka)$ verhalten sich an den Polstellen nach (A 4) wie $1/\sqrt{t}$, und für den gesamten Summanden ergibt sich ein Verhalten wie

$$\exp \left[t \left(|\varphi - \pi| - \pi + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\log(\varrho_1 \varrho_2/a^2)}{\log(2t/ka)} \right) \right]. \quad (18)$$

Im $\lim t \rightarrow \infty$ streben die Reihenglieder exponentiell dem Werte Null zu, sofern $|\varphi - \pi| < \pi$; überall außer in derjenigen Richtung, in welcher die Lichtquelle gelegen ist, konvergieren die Summen. Allerdings fangen die Reihenglieder erst an, kleiner zu werden, wenn

$$t < \frac{ka}{2} \cdot \left(\frac{\varrho_1 \varrho_2}{a^2} \right)^{\frac{\pi}{2(\pi - |\varphi - \pi|)}}, \quad (19)$$

da erst dann der Exponent von (18) negativ wird. In der Nähe der Einfallsrichtung wird der Exponent von (19) beliebig groß, und damit auch der Wert von t und somit die Anzahl der erforderlichen Reihenglieder von (14). Mit wachsendem Beugungswinkel konvergiert die Reihe schneller, wird jedoch praktisch erst dann brauchbar, wenn die Reihenglieder von Anfang an rasch abnehmen. Die hierfür nötigen Beugungswinkel erschließen

wir aus der Untersuchung des Anfangsteils der Reihe. Die zugehörigen ν -Werte liegen nach Formel (A 17) des Anhangs in der Nähe von ka , und zwar in einem Abstand von der Größenordnung $(ka)^{1/3}$ in der Richtung $e^{i\pi/3}$, besitzen somit neben einem Realteil $\approx ka$ einen Imaginärteil von der Größenordnung $(ka)^{1/3}$, welcher positiv ist und von Glied zu Glied wächst. Das Verhalten der Hankel-Funktionen vom Argument $k\varrho$ wird nach den Debyeschen asymptotischen Formeln (s. Magnus-Oberhettinger⁷ S. 33, b 1) bestimmt durch den Exponentialfaktor

$$e^{i k \sqrt{\varrho^2 - a^2} - i \nu \arcsin a/\varrho}.$$

Der positive Imaginärteil von ν bewirkt, daß dies mit wachsender Nummer der Polstellen exponentiell größer wird. Die Reihenglieder von (14) können daher nur dann abnehmen, wenn die winkelabhängigen Faktoren für entsprechende Kompen-sation sorgen, also

$$e^{-i \nu (|\pi - \varphi| - \pi + \arcsin a/\varrho_1 + \arcsin a/\varrho_2)}$$

mit wachsendem Imaginärteil von ν kleiner wird, d. h.

$$\arcsin \frac{a}{\varrho_1} + \arcsin \frac{a}{\varrho_2} + |\varphi - \pi| < \pi. \quad (20)$$

Wie aus der beistehenden Abb. 3 zu entnehmen ist, bedeutet dies gerade, daß P_1 und P_2 für einander nicht geometrisch sichtbar sind. Im Schatten ist also die Reihe rasch, im Licht dagegen sehr spät

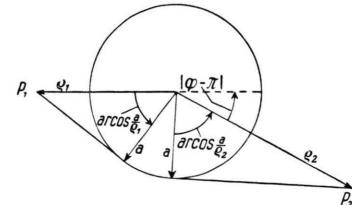


Abb. 3. Geometrische Deutung der Konvergenzbedingung für die Residuensumme.

konvergent. Praktisch kommt es allein auf das Verhalten der ersten Reihenglieder an, so daß Gl. (14) nur außer Sicht brauchbar ist und wir uns für den Sichtfall nach einer anderen Formel umsehen müssen. Das Rezept dazu ist in § 1 bereits enthalten; wir spalten mittels Gl. (7) von (13) einen Teil ab, welcher von dem Nenner $\sin \nu \pi$ frei ist und der geometrisch reflektierten Welle entspricht:

$$G = \frac{i\pi}{4} \sum_l \frac{\cos \nu_l \varphi}{\sin \nu_l \pi} \cdot e^{i \nu_l \pi} \frac{H_{\nu_l}^{(1)}(k\varrho_1) H_{\nu_l}^{(1)}(k\varrho_2)}{\frac{\partial}{\partial \nu} \Omega H_{\nu}^{(1)}(ka) / \nu_l} \Omega H_{\nu_l}^{(2)}(ka) \\ + \frac{i}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} dr e^{ir\varphi} \frac{H_{\nu}^{(1)}(k\varrho_2)}{\Omega H_{\nu}^{(1)}(ka)} (\Omega H_{\nu}^{(1)}(ka) H_{\nu}^{(2)}(k\varrho_1) - \Omega H_{\nu}^{(2)}(ka) H_{\nu}^{(1)}(k\varrho_1)). \quad (21)$$

An Stelle der Bedingung (20) ergibt sich jetzt

$$\arccos \frac{a}{\varrho_1} + \arccos \frac{a}{\varrho_2} + |\varphi| < 2\pi. \quad (22)$$

Dies ist im gesamten Bereich $|\varphi| < \pi$ erfüllt, interessiert aber natürlich nur für das Sichtgebiet, da außer Sicht die einfachere Reihendarstellung (14) möglich ist.

Es sei hier darauf verzichtet, nachzuweisen, daß in der Tat der geometrische Anteil die übliche Gestalt der reflektierten Welle neben der Primärwelle enthält, da hierauf an anderer Stelle genauer eingegangen werden soll⁹. Doch wollen wir die asymptotische Gestalt der ersten Kriechwellen für $\Omega = 1$; d/dx kurz angeben. Wir drücken zunächst die in den Nennern stehenden Hankel-Funktionen von ka mittels der Formel (A 14) des Anhangs 1 durch das Airysche Integral aus, dessen Argument vermittels Gl. (A 16) mit ν zusammenhängt. Die Nullstellen der Hankel-Funktion $H_{\nu}^{(1)}(ka)$ bezeichnen wir mit $\bar{\nu}_l$, die ihrer Ableitung mit ν_l , die zugehörigen Argumente des Airyschen Integrals mit \bar{q}_l bzw. q_l . Es gilt somit

$$H_{\nu_l}^{(1)'}(ka) = 0, \quad H_{\bar{\nu}_l}^{(1)}(ka) = 0, \quad (23) \\ A'(q_l) = 0, \quad A(\bar{q}_l) = 0.$$

Die Ableitungen von H_{ν} nach dem Argument führen wir auf Ableitungen nach dem Index zurück vermittels der Gleichung

$$\frac{\partial H_{\nu}^{(1)}(x)}{\partial x} \sim - \frac{\partial H_{\nu}^{(1)}(x)}{\partial \nu},$$

welche man etwa aus der Rekursionsformel

$$2 \frac{\partial H_{\nu}^{(1)}(x)}{\partial x} = H_{\nu-1}^{(1)}(x) - H_{\nu+1}^{(1)}(x)$$

durch Taylor-Entwicklung um die Stelle ν erhält. Für (14) ergeben sich damit die folgenden asymptotischen Formeln der Kriechwellen:

$$G_{\text{kr}} \sim - \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{ka}{6} \right)^{1/3} e^{i\pi/3} \sum_l \frac{\cos \nu_l (\varphi - \pi)}{\sin \nu_l \pi} \quad (24) \\ \cdot \frac{H_{\nu_l}^{(1)}(k\varrho_1) H_{\nu_l}^{(1)}(k\varrho_2)}{q_l \cdot A^2(q_l)},$$

$$\bar{G}_{\text{kr}} \sim - \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{ka}{6} \right)^{1/3} e^{i\pi/3} \sum_l \frac{\cos \bar{\nu}_l (\varphi - \pi)}{\sin \bar{\nu}_l \pi} \quad (24 \text{ a}) \\ \cdot \frac{H_{\bar{\nu}_l}^{(1)}(k\varrho_1) H_{\bar{\nu}_l}^{(1)}(k\varrho_2)}{A'^2(\bar{q}_l)}.$$

Dies gilt für beliebige Werte der Abstände ϱ_1 und ϱ_2 , sofern sie nur $\geq a$ sind. Liegt Quelle oder Beobachter in der Zylinderoberfläche, dann kürzt sich eine Hankel-Funktion des Zählers von (14) gegen eine des Nenners; liegen beide auf der Zylinderoberfläche, so fällt auch die zweite Hankel-Funktion im wesentlichen gegen die im Nenner stehende zweite Ableitung fort. Liegen beide Punkte in gebührendem Abstand von der Zylinderoberfläche (nämlich so, daß $k\varrho - ka$ mindestens von der Größenordnung $(ka)^{1/3}$ ist), so kann man wieder der Debyeschen asymptotischen Formel verwenden und erhält

$$G_{\text{kr}} \sim - \frac{\pi}{4} e^{-i\pi/6} \left(\frac{ka}{6} \right)^{1/3} \frac{\exp[ik\sqrt{\varrho_1^2 - a^2} - i\pi/4]}{\sqrt{k\sqrt{\varrho_1^2 - a^2}}} \cdot \frac{\exp[ik\sqrt{\varrho_2^2 - a^2} - i\pi/4]}{\sqrt{k\sqrt{\varrho_2^2 - a^2}}} \cdot \sum_l \frac{\exp[i\nu_l \varphi] + \exp[i\nu_l (2\pi - \varphi)]}{1 - \exp[2\pi i \nu_l]} \\ \cdot \frac{\exp[-i\nu_l (\arccos a/\varrho_1 + \arccos a/\varrho_2)]}{q_l A^2(q_l)}, \quad (25)$$

$$\bar{G}_{\text{kr}} \sim - \frac{\pi}{12} e^{i\pi/6} \left(\frac{ka}{6} \right)^{1/3} \frac{\exp[ik\sqrt{\varrho_1^2 - a^2} - i\pi/4]}{\sqrt{k\sqrt{\varrho_1^2 - a^2}}} \cdot \frac{\exp[ik\sqrt{\varrho_2^2 - a^2} - i\pi/4]}{\sqrt{k\sqrt{\varrho_2^2 - a^2}}} \cdot \sum_l \frac{\exp[i\bar{\nu}_l \varphi] + \exp[i\bar{\nu}_l (2\pi - \varphi)]}{1 - \exp[2\pi i \bar{\nu}_l]} \\ \cdot \frac{\exp[-i\bar{\nu}_l (\arccos a/\varrho_1 + \arccos a/\varrho_2)]}{A'^2(\bar{q}_l)}. \quad (25 \text{ a})$$

⁹ Für ebene Primärwelle ist dieser Nachweis bei Imai gegeben.

Man erkennt als Faktoren dieses Ausdrucks die von P_1 bzw. P_2 zum Rand des sichtbaren (bzw. beleuchteten) Flächengebietes strahlende Zylinderwelle, und weiter (unter der Summe) Phasenglieder mit Dämpfung (entsprechend dem imaginären Anteil von ν) welche zurückgelegten Winkelstrecken von

$$\varphi - \arcsin a/\varrho_1 - \arcsin a/\varrho_2$$

bzw.

$$2\pi - \varphi - \arcsin a/\varrho_1 - \arcsin a/\varrho_2$$

entsprechen. Ein Blick auf Abb. 3 lehrt, daß dies gerade die geometrischen Wegstrecken der beiderseits an dem Zylinder entlangkriechenden Wellen sind, welche von P_2 kommend die Oberfläche tangential getroffen haben und sie in Richtung auf P_1 wieder verlassen. Somit ist die in I entwickelte Vorstellung über das Zustandekommen der Kriechwellen-Terme dem Ergebnis der Watson-Transformation in allen Einzelheiten angepaßt. Dies gilt sogar für den aus $\sin \nu \pi$ entstandenen Nenner von Gl. (25); er ist identisch mit dem Nenner von I, Gl. (7), entstanden durch Summation der geometrischen Reihe derjenigen Kriechwellen, welche den Zylinder ein-, zwei-, drei- und mehrmals umlaufen haben.

Die Kriechwellen des Sichtgebietes [Gl. (21)] unterscheiden sich von denen des Schattens nur durch leicht ersichtliche Modifikationen der Winkelkoeffizienten, durch welche die „Kriechstrecken“ folgende Werte annehmen:

$$2\pi + \varphi - \arcsin a/\varrho_1 - \arcsin a/\varrho_2$$

bzw.

$$2\pi - \varphi - \arcsin a/\varrho_1 - \arcsin a/\varrho_2.$$

Aus Abb. 4 ist zu ersehen, daß auch dies der geometrischen Lage gemäß ist.

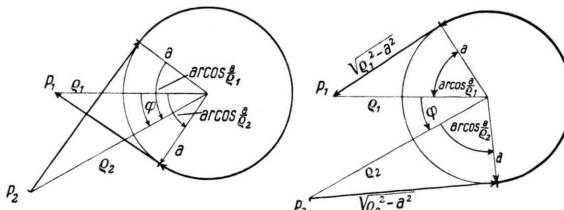


Abb. 4a und 4b. Wegskizzen für die beiden Kriechwellen von P_2 nach P_1 .

Benutzen wir die in Anhang 1 gegebenen Werte von q_i , \bar{q}_i , A und A' und die Gl. (A 17a, b) für ν , dann ergeben sich für die Konstanten in (25) und (25a) die Werte der Tab. 1 und 2.

| | | |
|--|----------|----------|
| $\nu = ka + e^{i\pi/3} (ka)^{1/3} \cdot 0,808617 - e^{-i\pi/3} (ka)^{-1/3} \cdot 0,145463$ | 2,578096 | 0,260341 |
| | 3,825715 | 0,514009 |
| | 4,891820 | 0,818106 |
| | 5,851301 | 1,158348 |
| $\bar{\nu} =$ | 1,855757 | 0,114794 |
| | 3,244608 | 0,350916 |
| | 4,381671 | 0,639968 |
| | 5,386614 | 0,967187 |
| | 6,305263 | 1,325211 |

Tab. 1. Nullstellen von $H_\nu^{(1)'}(ka)$ und $H_\nu^{(1)}(ka)$.

| $\pi/(4 \cdot 6^{1/3} q A^2)$ | $\pi/(12 \cdot 6^{1/3} A'^2)$ |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 0,21607 | 0,12845 |
| 0,11075 | 0,09793 |
| 0,09055 | 0,08437 |
| 0,08000 | 0,07613 |
| 0,07312 | 0,07038 |

Tab. 2. Koeffizienten der Kriechwellen in der Greenschen Funktion.

Das Verhältnis der Kriechwellen (21) zur Primärwelle G_0 (genommen auf der Zylinderfläche an der Schattengrenze) wird

$$G_{kr}/G_0 = \frac{(ka)^{1/3}}{\sqrt{2} k \sqrt{\varrho_1^2 - a^2}} \exp [ik \sqrt{\varrho_1^2 - a^2} + i\pi/12] \cdot \sum_l C_l \frac{\exp [i\nu_l(\varphi + \pi)] + \exp [i\nu_l(\pi - \varphi)]}{1 - \exp [2\pi i\nu_l]} \cdot \exp [i\nu_l(\arcsin a/\varrho_1 + \arcsin a/\varrho_2)] \quad (25b)$$

mit den in Tab. 3 aufgeführten Koeffizienten C_l bzw. \bar{C}_l .

| C_l | \bar{C}_l |
|---------|-------------|
| 1,53187 | 0,91072 |
| 0,78520 | 0,69427 |
| 0,64199 | 0,59820 |
| 0,56719 | 0,53974 |
| 0,51840 | 0,49897 |

Tab. 3.

Der Vergleich mit I zeigt, daß die dort in Gl. (59) und (60) angegebenen Koeffizienten bis 40% zu klein sind. Gleichzeitig sieht man die Ursache für diese Abweichung: die höheren Kriechwellen sind so stark, daß sie beim Anschluß des Sicht- an das Schattengebiet nicht beiseite gelassen werden dürfen, wie wir dies in I getan haben. In der Arbeit über die Kugel⁸ dagegen sind bereits die richtigen Koeffizienten der Tab. 3 herangezogen worden, deren Bestimmung aus der Integralgleichung (durch Anschluß der höheren Winkelableitungen von G) zu kompliziert wird; dies ist der Nachteil der Integral-

gleichungsmethode, welche anderseits aber den Vorteil besitzt, auf beliebige Flächen anwendbar zu sein. Glücklicherweise hängt der Anschluß an der Schattengrenze nur von der Krümmung der tangentiell getroffenen geodätischen Linie ab (in erster Näherung wenigstens) und kann daher vom Zylinder übernommen werden. Die Kriechwellen werden in der Schattengrenze der beugenden Oberfläche „geboren“, und ihr „Geburtsgewicht“ (bezogen auf Primärwelle 1) ist π/qA für u und $(6i/ka)^{1/3}\pi/3A'$ für $1/ik \cdot \partial \bar{u} / \partial n$; diese Zahlenwerte sind in Tab. 4 angegeben.

Daß sie in der Tat nur von der geodätischen Krümmung abhängen, ergibt sich etwa daraus, daß

sie für die Kugel ebenso gelten wie für den Zylinder. — Auf die Behandlung der Beugung an konvexen Flächen mittels der Integralgleichung unter Benützung der angegebenen „Geburtsgewichte“ gedenken wir demnächst zurückzukommen.

| u | $1/ik \cdot \partial \bar{u} / \partial n$ |
|----------|--|
| 1,83243 | $-1,79678 \cdot (i/ka)^{1/3}$ |
| -0,73473 | 1,56880 |
| 0,54538 | -1,45621 |
| -0,45333 | 1,38324 |
| 0,39627 | -1,32996 |

Tab. 4. „Geburtsgewichte“ der Kriechwellen (Primärerregung = 1).

3. Greensche Funktion der Kugel

Die Greensche Funktion des leeren Raumes ist

$$G_0(r_1, r_2, \vartheta) = \frac{\exp[ik\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \vartheta}]}{4\pi\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \vartheta}} = \frac{ik}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) \zeta_n^{(1)}(kr_2) \psi_n(kr_1) \text{ für } r_1 < r_2. \quad (26)$$

Darin sind r_1 und r_2 die Abstände des Auf- und Quellpunktes vom Koordinatenursprung und ϑ der Winkel zwischen ihren Radiusvektoren. Die Funktionen $\zeta^{(i)}$ und ψ sollen in der Sommerfeldschen Bezeichnungsweise bedeuten

$$\zeta_n^{(1)}(x) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x); \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x). \quad (27)$$

Die Formel für die Entwicklung nach Kugelfunktionen entnehme man etwa aus Magnus-Oberhettinger⁷ Seite 31, Gl. (4a). Die Greensche Funktion der Kugel zur Randbedingung $\Omega G = 0$ ist

$$G = \frac{ik}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) \zeta_n^{(1)}(kr_2) \left(\psi_n(kr_1) - \frac{\Omega \psi_n(ka)}{\Omega \zeta_n^{(1)}(ka)} \zeta_n^{(1)}(kr_1) \right). \quad (28)$$

Die Summe läßt sich wieder als Residuensumme eines Integrals auffassen:

$$G = -\frac{k}{8\pi} \int_{C_+} \frac{d\mu}{\sin \mu \pi} (2\mu + 1) P_\mu(-\cos \vartheta) \zeta_\mu^{(1)}(kr_2) \frac{\psi_\mu(kr_1) \Omega \zeta_\mu^{(1)}(ka) - \Omega \psi_\mu(ka) \zeta_\mu^{(1)}(kr_1)}{\Omega \zeta_\mu^{(1)}(ka)}. \quad (29)$$

Da der Integrand eine ungerade Funktion von $\mu + 1/2$ ist, kann die Integration auf den bereits bekannten Weg D verlegt werden (s. Abb. 5), welcher in einen Umlauf um die Polreihe der Zylinderfunktionen des Nenners deformiert werden darf. So erhalten wir die Watsonschen Residuenreihen

$$G = \frac{ik}{8} \sum_l \frac{(2\mu_l + 1) P_{\mu_l}(-\cos \vartheta)}{\sin \mu_l \pi} \cdot \frac{\zeta_{\mu_l}^{(1)}(kr_1) \zeta_{\mu_l}^{(1)}(kr_2) \Omega \zeta_{\mu_l}^{(2)}(ka)}{\frac{\partial}{\partial \mu} \Omega \zeta_{\mu_l}^{(1)}(ka) / \mu_l}. \quad (30)$$

Für ihre Konvergenz gilt genau dasselbe wie beim Zylinder; das bedeutet, daß (30) nur im Schattengebiet brauchbar ist. Um auch für das Sichtgebiet brauchbare Reihen zu erhalten, nehmen wir eine zu (7) analoge Aufspaltung der Kugelfunktionen vor, welche in Gl. (A 38) (Anhang 3) angegeben ist. Dadurch entsteht

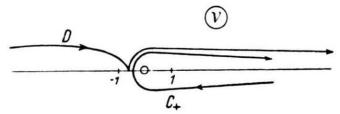


Abb. 5. Integrationsweg für die Summation der Kugelfunktionen.

$$G = \frac{ik}{8} \sum_l \frac{(2\mu_l + 1) P_{\mu_l}(\cos \vartheta)}{\sin \mu_l \pi} e^{i\mu_l \pi} \cdot \frac{\frac{\zeta_{\mu_l}^{(1)}(kr_1) \zeta_{\mu_l}^{(1)}(kr_2) \Omega \zeta_{\mu_l}^{(2)}(ka)}{\partial}}{\partial \mu} \Omega \zeta_{\mu_l}^{(1)}(ka)_{\mu_l} \\ + \frac{ik}{4\pi} \int_{D^-} d\mu (2\mu + 1) Q_{\mu}^{(2)}(\vartheta) \zeta_{\mu}^{(1)}(kr_2) \left(\psi_{\mu}(kr_1) - \frac{\Omega \psi_{\mu}(ka)}{\Omega \zeta_{\mu}^{(1)}(ka)} \zeta_{\mu}^{(1)}(kr_1) \right). \quad (31)$$

Die Residuensumme nimmt nunmehr auch im beleuchteten Gebiet rasch ab, während das Integral den geometrischen Anteilen entspricht und sich wegen des regulären Verhaltens des Integranden auf den positiven Teilen der reellen Achse gut asymptotisch auswerten lässt; dabei kann man den Integrationsweg über einen auf der positiven Achse zwischen 0 und ka liegenden Sattelpunkt führen, im übrigen verläuft die Rechnung im wesentlichen wie beim Zylinder (s. das Beispiel für die einfallende ebene Welle in § 1), da $Q_{\nu}^{(2)}$ asymptotisch eine Exponentialfunktion ist, s. Gl. (A 39) des dritten Anhanges.

Die Greensche Dyade des elektromagnetischen Falls lässt sich auf skalare Funktionen zurückführen, welche sich von (28) nur unwesentlich durch die Gestalt der Funktionen von r_2 und der Kugelflächenfunktionen unterscheiden, so dass sich die vorstehende Methode ohne weiteres überträgt. — Wir geben abschließend noch die asymptotischen Formeln für die Kriechwellen (31), spezialisieren dabei wieder auf $\Omega(x) = d/dx$ und $\Omega = 1$, und setzen zunächst voraus $\sin \vartheta \gg 1/\nu$:

$$G_{kr} \sim \frac{\pi}{8} \left(\frac{ka}{6} \right)^{1/3} \sqrt{\frac{\pi ka}{2r_1 r_2 \sin \vartheta}} e^{-i\pi/6} \sum_l \frac{\exp[i\nu_l \pi] \cos(\nu_l \vartheta - \pi/4)}{\cos \nu_l \pi} \cdot \frac{H_{\nu_l}^{(1)}(kr_1) H_{\nu_l}^{(1)}(kr_2)}{q_l A^2(q_l)}, \quad (32a)$$

$$\bar{G}_{kr} \sim \frac{\pi}{24} \left(\frac{ka}{6} \right)^{1/3} \sqrt{\frac{\pi ka}{2r_1 r_2 \sin \vartheta}} e^{-i\pi/6} \sum_l \frac{\exp[i\nu_l \pi] \cos(\nu_l \vartheta - \pi/4)}{\cos \nu_l \pi} \cdot \frac{H_{\nu_l}^{(1)}(kr_1) H_{\nu_l}^{(1)}(kr_2)}{A'^2(\bar{q}_l)}. \quad (32b)$$

Liegen beide Punkte in einem Abstand, der groß gegen $(ka)^{1/3}/k$ ist, dann kommt

$$G_{kr} \sim -\frac{e^{i\pi/3}}{4 \cdot 6^{1/3}} \cdot (ka)^{5/6} \cdot \frac{\exp[ik\sqrt{r_1^2 - a^2}] \cdot \exp[ik\sqrt{r_2^2 - a^2}]}{k \sqrt{r_1 r_2} \sqrt{r_1^2 - a^2} \sqrt{r_2^2 - a^2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2 \sin \vartheta}} \quad (33a)$$

$$\cdot \sum_l \frac{\exp \left[i\nu_l (\vartheta + 2\pi) - i\frac{\pi}{4} \right] + \exp \left[i\nu_l (2\pi - \vartheta) + i\frac{\pi}{4} \right]}{1 + e^{2\pi i \nu_l}} \cdot \frac{\exp \left[-i\nu_l \left(\arccos \frac{a}{r_1} + \arccos \frac{a}{r_2} \right) \right]}{q_l A^2(q_l)},$$

$$\bar{G}_{kr} \sim -\frac{e^{i\pi/3}}{12 \cdot 6^{1/3}} \cdot \dots \cdot \frac{\dots}{A'^2(\bar{q}_l)}. \quad (33b)$$

Hier treten wieder die in Abb. 4 eingezeichneten Kriechstrecken in den Exponenten auf, und die Koeffizienten sind bis auf einen konstanten Faktor die der Tab. 2; doch ändern sich für (32a) die Korrekturen von ν_l gegenüber Tab. 1 entsprechend Gl. (A 17 d) von Anhang 1. Die Zahlenwerte finden sich in der ersten Spalte von Tab. 5. In der zweiten Spalte sind dieselben Größen aufgeführt für die Randbedingung $\Omega(x) = 1 + x \cdot d/dx$, welche im elektromagnetischen Fall auftritt. [Hierfür gilt (A 17 c)].

| akustisch | elektromagnetisch |
|-----------|-------------------|
| 0,163707 | -0,454633 |
| -0,163370 | -0,357312 |
| -0,448662 | -0,579356 |
| -0,767000 | -0,869212 |
| -1,115622 | -1,201073 |

Tab. 5. Koeffizienten von $e^{-i\pi/3} ka^{-1/3}$ in der asymptotischen Entwicklung der ν_l für die Kugel.

Das Verhältnis der Kriechwellen zur Primärwelle G_0 (wiederum genommen auf der beugenden Fläche in der Schattengrenze) ist

$$G/G_0 = -\frac{(ka)^{5/6}}{k} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{r_2^2 - a^2}}{r_2}} \cdot \frac{\exp[ik\sqrt{r_1^2 - a^2} + i\pi/12]}{\sqrt{2r_1} \sqrt{r_1^2 - a^2} \sin \vartheta} \cdot \sum_l C_l \cdot \frac{\exp[i\nu_l(\vartheta + \pi)] + i \exp[i\nu_l(\pi - \vartheta)]}{1 + \exp[2\pi i \nu_l]} \\ \cdot e^{i\nu_l \left(\arcsin \frac{a}{r_1} + \arcsin \frac{a}{r_2} \right)} \quad (34)$$

mit den Koeffizienten von Tab. 3. Die Übereinstimmung mit unseren früher aus der Integralgleichung abgeleiteten Formeln⁸ ist offenkundig.

Ist $\nu \sin \vartheta$ nicht $\gg 1$, also ϑ nahezu 0 oder π , dann gilt die Entwicklung (A 39) nicht, vielmehr treten asymptotisch Bessel-Funktionen des Arguments $\nu \sin \vartheta$ auf. Speziell für $\vartheta=0$ (Rückstrahlung) werden die P_μ in (31) alle = 1, und wir haben in (32), (33) und (34) einen Faktor $\sqrt{2/\pi\nu \sin \vartheta} \cdot \cos(\nu\vartheta - \pi/4)$ wegzulassen. Statt (34) erhalten wir dann

$$(G/G_0)_{\vartheta=0} = -\frac{(ka)^{4/3}}{k} \sqrt{\frac{r_2^2 - a^2}{r_2}} \cdot \frac{\exp[ik\sqrt{r_1^2 - a^2} + i\pi/3]}{\sqrt{r_1}\sqrt{r_1^2 - a^2}} \sum_l \sqrt{\pi} C_l \frac{\exp[i\nu_l \pi]}{1 + \exp[2\pi i \nu_l]} \cdot e^{i\nu_l \left(\arcsin \frac{a}{r_1} + \arcsin \frac{a}{r_2}\right)}. \quad (34a)$$

Auch dies stimmt genau mit unseren früheren Formeln überein (s. Deppermann und Franz⁸, § 6).

Daß die Kriechwellen auch bei der Kugel mit den in Tab. 4 aufgeführten Gewichten entstehen, leitet man leicht aus (32) ab.

Mathematische Anhänge

Anhang 1

Für positives Argument x und einen Index ν mit positivem Real- oder Imaginärteil, der nicht zu nahe dem Werte x liegt, gilt für die Hankel-Funktion erster Art die folgende asymptotische Darstellung [s. etwa Sommerfeld⁴, Gl. (21. 39)]

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim \frac{2}{i} \sqrt{\frac{2}{\pi x \sin \alpha}} \sin[x(\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) + \pi/4] \quad (A 1)$$

mit

$$\cos \alpha = \frac{\nu}{x}; \quad \Im(\alpha) < 0; \quad |\Re(\alpha)| < \pi. \quad (A 2)$$

Ist $|\nu| > x$, somit $|\cos \alpha| > 1$, und $\Im(\alpha) < -1$, dann gilt genähert

$$\cos \alpha \sim i \sin \alpha; \quad \alpha \sim \frac{1}{i} \log \frac{2\nu}{x}; \quad (A 3)$$

und daher

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \cdot 2 \cdot \sin \left\{ \nu \left(\log \frac{2\nu}{x} - 1 \right) + i \frac{\pi}{4} \right\}. \quad (A 4)$$

Die Größenordnung der Hankel-Funktion wird damit im wesentlichen bestimmt durch die Phase von ν . Mit $\nu \equiv t \cdot e^{i\psi}$ ist nämlich

$$\begin{aligned} \nu \left(\log \frac{2\nu}{x} - 1 \right) &= t \left(\cos \psi \left(\log \frac{2t}{x} - 1 \right) - \psi \sin \psi \right) \\ &+ i t \left(\sin \psi \left(\log \frac{2t}{x} - 1 \right) + \psi \cos \psi \right). \end{aligned} \quad (A 5)$$

Bei gegebenem t verschwindet der Realteil dieses Ausdrucks für einen bestimmten Winkel ψ_0 , der näherungsweise gegeben ist durch

$$\psi_0 \sim \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\log 2t/x} \right). \quad (A 6)$$

Die zugehörigen ν -Werte

$$\nu_0 \sim t e^{i\psi_0} \quad (A 7)$$

geben, dargestellt mittels des positiven Parameters t , diejenige im ersten Quadranten gelegene Linie an, längs deren die Hankel-Funktion nicht exponentiell

groß wird, sondern im Gegenteil proportional $1/\sqrt{\nu}$ klein; auf ihr liegen die Nullstellen der Hankel-Funktion. In endlichem Abstand von dem kritischen Phasenwert $\psi_0 \sim \pi/2$ wird die absolute Größe der Hankel-Funktion für hinreichend große t bestimmt durch einen Faktor

$$e^{t|\cos \psi| \log \frac{2t}{x}} = \left(\frac{2t}{x} \right)^{t|\cos \psi|}. \quad (A 8)$$

Hieraus folgt für das im Text auftretende Verhältnis der Hankel-Funktionen mit Argument $k\varrho_2$ und ka

$$H_\nu^{(1)}(k\varrho_2)/H_\nu^{(1)}(ka) \sim \left(\frac{a}{\varrho_2} \right)^{t|\cos \psi|}. \quad (A 9)$$

Außer diesem Ausdruck wird noch der folgende gebraucht

$$H_\nu^{(1)}(ka) J_\nu(k\varrho_1) - J_\nu(ka) H_\nu^{(1)}(k\varrho_1). \quad (A 10)$$

Das Verhalten dieser Differenz wird einerseits durch das asymptotische Verhalten (A 4) bzw. (A 8) der Hankel-Funktion $H_\nu^{(1)}$ bestimmt, weiter aber dadurch, daß es stets eine Linearkombination der beiden Hankel-Funktionen gibt, bei welcher von dem sin-Ausdruck in (A 4) nur der exponentiell kleine Anteil bestehen bleibt, und zwar ist dies im ersten Quadranten die Bessel-Funktion, im zweiten Quadranten $H_\nu^{(2)} + e^{2\pi i \nu} H_\nu^{(1)}$. In (A 10) kann wegen der Differenzbildung an Stelle von J_ν auch die letzte Kombination bei Bedarf eingefügt werden. Daher erweist sich das exponentiell (genauer: wie eine Fakultät) anwachsende $H_\nu^{(1)}$ stets als verbunden mit einem im selben Maße abnehmenden Faktor, und wir erhalten für (A 10) asymptotisch bis auf konstante Faktoren

$$\sim \frac{1}{\nu} \left(\left(\frac{a}{\varrho_1} \right)^{t|\cos \psi|} - \left(\frac{\varrho_1}{a} \right)^{t|\cos \psi|} \right). \quad (A 11)$$

Das Produkt von (A 9) und (A 11) strebt daher mit wachsendem t gegen 0, sofern $\varrho_2 > a$ und ϱ_1 ist. Dieses Ergebnis läßt sich auf $\Omega H_\nu^{(1)}(ka)$ und $\Omega J_\nu(ka)$ übertragen.

Zur Bestimmung der kleinsten Wurzeln $\bar{\nu}_l$ von $H_\nu^{(1)}(x)=0$ ist Gl. (A 1) nicht genau genug; diese liegen in der Nähe von $\nu=x$, wo sich die Hankel-Funktionen asymptotisch durch die Zylinderfunktionen

vom Index 1/3 bzw. das Airysche Integral ausdrücken lassen. Der Zusammenhang sei hier kurz explizit abgeleitet. Die Sommerfeldsche Integraldarstellung

$$H_{\nu}^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_S d\chi e^{i x \cos \chi + i \nu \left(\chi - \frac{\pi}{2}\right)} \quad (\text{A 12})$$

mit dem aus Abb. 6 ersichtlichen Integrationsweg S besitzt für $\nu = x$ einen Sattelpunkt bei $\chi = \pi/2$. Indem

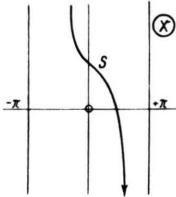


Abb. 6. Integrationsweg für die Sommerfeldsche Darstellung der Hankel-Funktion.

wir $\chi = \pi/2 + t$ setzen und um $t = 0$ entwickeln, erhalten wir

$$H_{\nu}^{(1)}(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_{-e^{i\pi/3}\infty}^{e^{i\pi/3}\infty} dt \cdot e^{it(\nu-x) + \frac{i x}{6} t^3}. \quad (\text{A 13})$$

Mit $t \equiv (6/x)^{1/3} e^{-i\pi/3} \tau$ wird dies:

$$H_{\nu}^{(1)}(x) \sim \frac{2}{\pi} \cdot e^{-i\pi/3} \cdot \left(\frac{6}{x}\right)^{1/3} \cdot A(q). \quad (\text{A 14})$$

Darin ist $A(q)$ das Airysche Integral

$$A(q) \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot e^{i(q\tau - \tau^3)} = \int_0^{\infty} d\tau \cos(\tau^3 - q\tau) \quad (\text{A 15})$$

und

$$q \equiv \left(\frac{6}{x}\right)^{1/3} \cdot e^{-i\pi/3} \cdot (x - \nu). \quad (\text{A 16})$$

Nennen wir \bar{q}_l die Nullstellen der Hankel-Funktion $H_{\nu}^{(1)}(x)$ und \bar{q}_l die Nullstellen des Airyschen Integrals, dann ergibt sich aus (A 16) der Zusammenhang

$$\bar{q}_l = x + \left(\frac{x}{6}\right)^{1/3} \cdot e^{i\pi/3} \cdot \bar{q}_l. \quad (\text{A 17})$$

Derselbe Zusammenhang besteht auch zwischen den Nullstellen der Ableitungen von $H_{\nu}^{(1)}$ bzw. von A , welche wir v_l und q_l nennen.

Für die Berechnung der Beugung an mäßig großen Objekten ist (A 17) nicht genau genug; wir müssen (wie bereits in I) ein Glied proportional $x^{-1/3}$ hinzufügen:

$$v_l = x + \left(\frac{x}{6}\right)^{1/3} e^{i\pi/3} q_l - \left(\frac{6}{x}\right)^{1/3} e^{-i\pi/3} \left(\frac{1}{10q_l} + \frac{q_l^2}{180}\right), \quad (\text{A 17a})$$

$$\bar{v}_l = x + \left(\frac{x}{6}\right)^{1/3} e^{i\pi/3} \bar{q}_l - \left(\frac{6}{x}\right)^{1/3} e^{-i\pi/3} \frac{\bar{q}_l^2}{180}. \quad (\text{A 17b})$$

Im Falle der Kugel interessieren die Nullstellen \tilde{v}_l von $(\sqrt{x} H_{\nu}^{(1)}(x))'$ und \tilde{q}_l von $[H_{\nu}^{(1)}(x)/\sqrt{x}]'$:

$$\tilde{v}_l = x + \left(\frac{x}{6}\right)^{1/3} e^{i\pi/3} q_l + \left(\frac{6}{x}\right)^{1/3} e^{-i\pi/3} \left(\frac{3}{20q_l} - \frac{q_l^2}{180}\right), \quad (\text{A 17c})$$

$$\tilde{q}_l = x + \left(\frac{x}{6}\right)^{1/3} e^{i\pi/3} q_l - \left(\frac{6}{x}\right)^{1/3} e^{-i\pi/3} \left(\frac{7}{20q_l} + \frac{q_l^2}{180}\right). \quad (\text{A 17d})$$

Die asymptotische Lage der Nullstellen für große q entnehmen wir aus der asymptotischen Darstellung von (A 15), welche sich sofort durch Entwicklung des Exponenten um die beiden Sattelpunkte $\tau = \pm \sqrt[3]{q/3}$ ergibt:

$$A(q) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(3q)^{1/4}} \cdot \cos \left[2 \left(\frac{q}{3} \right)^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right], \quad (\text{A 18})$$

$$A'(q) \sim -\frac{\sqrt{\pi}}{3} \cdot (3q)^{1/4} \sin \left[2 \left(\frac{q}{3} \right)^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (\text{A 19})$$

Man entnimmt hieraus, daß

$$q_l \sim 3 \left[\frac{\pi}{2} \left(l - \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3}; \quad \bar{q}_l \sim 3 \left[\frac{\pi}{2} \left(l - \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} \quad (\text{A 20})$$

$l = 1, 2, 3 \dots$

Die ersten fünf Nullstellen beider Funktionen sowie die zugehörigen Werte der jeweils anderen sind in Tab. A 1 angegeben. Sie wurden teils aus den Potenzreihen, teils aus den asymptotischen Reihen berechnet und mehrfach kontrolliert.

| q_l | $A(q_l)$ | \bar{q}_l | $A'(\bar{q}_l)$ |
|-----------|----------|-------------|-----------------|
| 1,469354 | 1,16680 | 3,372134 | -1,059053 |
| 4,684712 | -0,91272 | 5,895843 | 1,212955 |
| 6,951786 | 0,82862 | 7,962025 | -1,306735 |
| 8,889027 | -0,77962 | 9,788127 | 1,375676 |
| 10,632519 | 0,74562 | 11,457423 | -1,430780 |

Tab. A 1.

Anhang 2. Zusammenhang zwischen der Berechnung der Dämpfung aus der Watson-Transformation und aus der Integralgleichung¹⁰

Die Dämpfung der Kriechwellen bestimmt sich nach der Watson-Transformation aus den Nullstellen der Hankel-Funktion und ihrer Ableitung bzw. einer Kombination dieser beiden. Asymptotisch für große x führt dies auf die Nullstellen des Airy-Integrals (A 15) und dessen Ableitung. Anderseits haben wir die Dämpfung in I aus der Integralgleichung bestimmt, und dabei an Stelle von v_l [s. (A 17)] den folgenden Ausdruck erhalten

$$K_l = x - \alpha_l \cdot e^{-i\pi/3} \left(\frac{x}{24}\right)^{1/3}. \quad (\text{A 21})$$

Darin sind die α_l die Wurzeln von

$$F(\alpha) \equiv 1 - i \sqrt{\frac{3}{\pi}} \int_0^{\infty} dt t^{1/2} e^{i\alpha t - t^3} = 0. \quad (\text{A 22})$$

¹⁰ Die Anregung zu der vorliegenden Beweisführung geht auf eine Diskussionsbemerkung von H. Bremmer auf dem McGill-Symposium über Mikrowellen-

optik (Montreal 1953) zurück. Ich darf Herrn Dr. Bremmer an dieser Stelle auch für eine schriftliche Diskussion des Gegenstandes danken.

Um den Zusammenhang zwischen dieser Bestimmungsgleichung und dem Airyschen Integral herzustellen, betrachten wir das Integral

$$f(\alpha) \equiv \int_0^\infty dt t^{-1/2} \cdot e^{\alpha t - t^3}. \quad (\text{A 23})$$

Aus der offenkundig richtigen Beziehung

$$\int_0^\infty dt \frac{d}{dt} (t^{1/2} e^{\alpha t - t^3}) = 0$$

folgt für f die Differentialgleichung

$$f'''(\alpha) - \frac{\alpha}{3} f'(\alpha) - \frac{1}{6} f(\alpha) = 0. \quad (\text{A 24})$$

Das Airysche Integral (A 15) dagegen genügt ersichtlich der Differentialgleichung

$$A''(q) + \frac{q}{3} A(q) = 0. \quad (\text{A 25})$$

Die allgemeine Lösung hiervon setzt sich linear aus zwei der drei Funktionen $A(q)$, $A(e^{\pm 2\pi i/3} \cdot q)$ zusammen. Das Produkt zweier Lösungen $A_1(q)$ und $A_2(q)$ von (A 25) genügt der Differentialgleichung

$$(A_1 A_2)''' + \frac{4q}{3} (A_1 A_2)' + \frac{2}{3} A_1 A_2 = 0, \quad (\text{A 26})$$

und hieraus folgt, daß

$$\bar{f}(\alpha) = A_1 \left(\frac{e^{i\pi/3}}{4^{1/3}} \alpha \right) A_2 \left(\frac{e^{i\pi/3}}{4^{1/3}} \alpha \right) \quad (\text{A 27})$$

eine Lösung von (A 24) ist; da A_1^2 , A_2^2 und $A_1 A_2$ linear unabhängig sind, sofern A_1 und A_2 unabhängige Lösungen von (A 25) sind, haben wir damit sämtliche Lösungen von (A 24) gefunden. Um zu ermitteln, mit welchen Koeffizienten diese Lösungen in der speziellen Funktion $f(\alpha)$ von (A 23) kombiniert sind, entwickeln wir unsere Funktionen nach kleinen Argumentenwerten und vergleichen die ersten drei Koeffizienten. Man erhält durch Taylor-Entwicklung von $\exp(\pm iq\tau)$ bzw. $\exp(\alpha t)$ in den Integranden von (A 15) bzw. (A 23) unmittelbar

$$A(q) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + q \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + O(q^3) \right), \quad (\text{A 28})$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{3} \left(\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) + \alpha \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha^2}{2} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) + O(\alpha^3) \right). \quad (\text{A 29})$$

Unter Benutzung des Multiplikationstheorems der Γ -Funktion in Gestalt der Beziehungen (s. Magnus-Oberhettinger⁷, S. 1)

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\pi} \cdot 4^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = \sqrt{\pi} \cdot 2^{1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

sowie des Ergänzungssatzes

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 2\pi/\sqrt{3}$$

verifiziert man nunmehr leicht, daß

$$f(\alpha) = 4^{1/6} \cdot \sqrt{\frac{3}{\pi}} A\left(\frac{e^{i\pi/3}}{4^{1/3}} \alpha\right) \cdot A\left(\frac{e^{-i\pi/3}}{4^{1/3}} \alpha\right). \quad (\text{A 30})$$

Wir können jetzt $F(\alpha)$ aus Gl. (A 22) durch $f(\alpha)$ ausdrücken:

$$F(\alpha) = 1 - i \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{d f(\alpha)}{d \alpha} \quad (\text{A 31})$$

oder mit (A 30)

$$F(\alpha) = 1 + \frac{6}{i\pi} \left[e^{i\pi/3} A'\left(\frac{e^{i\pi/3}}{4^{1/3}} \alpha\right) A\left(\frac{e^{-i\pi/3}}{4^{1/3}} \alpha\right) + e^{-i\pi/3} A\left(\frac{e^{i\pi/3}}{4^{1/3}} \alpha\right) A'\left(\frac{e^{-i\pi/3}}{4^{1/3}} \alpha\right) \right]. \quad (\text{A 32})$$

Hieraus können wir die Ableitung des zweiten Airy-Integrals eliminieren mittels der Beziehung für die Wronskische Determinante. Aus (A 25) ergibt sich, daß die Wronski-Determinante zweier Lösungen eine Konstante ist, und ihr Wert kann aus dem höchsten Glied der Entwicklung (A 28) abgelesen werden:

$$e^{-2\pi i/3} \cdot A(q) A'(e^{-2\pi i/3} q) - A'(q) A(e^{-2\pi i/3} \cdot q) = -\frac{\pi}{6} e^{i\pi/6}. \quad (\text{A 33})$$

Damit erhalten wir

$$F(\alpha) = \frac{12}{\pi} e^{-i\pi/6} \cdot A\left(\frac{e^{i\pi/3}}{4^{1/3}} \alpha\right) A\left(\frac{e^{-i\pi/3}}{4^{1/3}} \alpha\right). \quad (\text{A 34})$$

Der Vergleich von (A 17) und (A 21) zeigt, daß die Nullstellen des ersten Faktors denen von $H_\nu^{(1)'}(x)$ entsprechen [vgl. (A 14)], während der zweite Faktor das konjugiert komplexe der Nullstellen von $H_\nu^{(1)}(x)$ liefert, in Übereinstimmung mit I, § 6.

Anhang 3. Aufspaltung und asymptotische Darstellung der Kugelfunktionen

Wir benötigen im Text die folgende Aufspaltung der Kugelfunktion 1. Art in zwei 2. Art:

$$P_\nu(\cos \vartheta) = Q_\nu^{(1)}(\vartheta) + Q_\nu^{(2)}(\vartheta), \quad (\text{A 35})$$

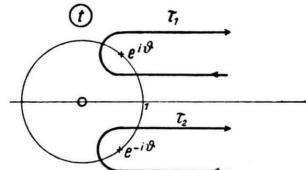


Abb. 7. Integrationswege für die Kugelfunktionen zweiter Art $Q_\nu^{(i)}(\vartheta)$.

wobei die Funktionen 2. Art $Q_\nu^{(i)}$ für $\Re(\nu) > -1$ definiert sein sollen durch

$$Q_\nu^{(i)}(\vartheta) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{(r_i)} \frac{dt}{t^{\nu+1} \sqrt{1+t^2 - 2t \cos \vartheta}}. \quad (\text{A 36})$$

Dabei soll für die der positiven Achse zugekehrten Teile der Integrationswege (s. Abb. 7) die Phase der Wurzel wie die von t dem Betrag nach kleiner als $\pi/2$ sein.

Man erkennt vermittels der Transformation $t' = -t$, daß zwischen den Funktionen $Q_\nu^{(i)}$ die folgenden Beziehungen bestehen

$$\begin{aligned} Q_\nu^{(1)}(\pi - \vartheta) &= e^{-i\pi\nu} Q_\nu^{(2)}(\vartheta); \\ Q_\nu^{(2)}(\pi - \vartheta) &= e^{i\pi\nu} Q_\nu^{(1)}(\vartheta). \end{aligned} \quad (\text{A 37})$$

Hieraus folgt, daß

$$P_\nu(-\cos \vartheta) = e^{i\pi\nu} P_\nu(\cos \vartheta) - 2i \sin \nu \pi Q_\nu^{(2)}(\vartheta). \quad (\text{A 38})$$

Hierdurch wird $Q_\nu^{(2)}$ für alle ν definiert; es bleibt bei ganzen Werten $\nu = n \geq 0$ regulär [entsprechend der Integraldarstellung (A 36)], besitzt aber bei negativ ganzzahligen ν Pole.

Für $\Re(\nu) > -1$ erhält man aus (A 36) asymptotische Formeln, indem man das Integral ersetzt durch

das zweifache Integral von $e^{\pm i\theta}$ bis ∞ , und beachtet, daß für sehr große $|\nu|$ der Betrag von t in einer Richtung, in welcher der Integrationsweg verlegt werden kann, sehr steil abfällt, so daß der Beitrag nur aus der unmittelbaren Umgebung des Endpunktes herrührt. Entwickelt man dort den Integranden, so ergibt sich für $\sin \vartheta \gg 1/\nu$

$$\begin{aligned} Q_\nu^{(1)}(\vartheta) &\sim \frac{\exp \left[-i \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \vartheta + i \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{2\pi\nu} \sin \vartheta}, \\ Q_\nu^{(2)}(\vartheta) &\sim \frac{\exp \left[i \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \vartheta - i \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{2\pi\nu} \sin \vartheta}, \\ P_\nu(\cos \vartheta) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\nu \sin \vartheta}} \cdot \cos \left[\left(\nu + \frac{1}{2} \right) \vartheta - \frac{\pi}{4} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A 39})$$

Kristallisationsüberspannungen

Von WOLFGANG LORENZ

Aus dem Physikalisch-Chemischen Institut der Universität Leipzig

(Z. Naturforsch. 9a, 716—724 [1954]; eingegangen am 8. Juni 1954)

Die Überspannungserscheinungen an Elektroden, bei denen Kristallisationsvorgänge geschwindigkeitsbestimmend sind, werden theoretisch behandelt. Abzuscheidende Metallionen werden erst an Wachstumsstellen ins Metallgitter eingebaut. Dies ist auf zwei Wegen möglich: Entweder werden die Ionen nur an Wachstumsstellen entladen, oder sie werden an allen Stellen der Metallocberfläche entladen und gelangen als adsorbierte Atome durch Oberflächendiffusion zu den Wachstumsstellen. Für beide Fälle wird die stationäre Strom-Spannungskurve (Gleichstrompolarisation) und die Polarisationsimpedanz (Wechselstrompolarisation) angegeben. Die Ergebnisse sind experimentell prüfbar, der Vergleich zwischen Theorie und Experiment läßt gewisse Rückschlüsse auf die an der Phasengrenze Metall/Elektrolyt herrschenden Verhältnisse zu.

Bei Stromfluß durch eine Elektrode ändert sich das Elektrodenpotential, die Elektrode wird polarisiert. Die Potentialänderung gegenüber dem Gleichgewichtspotential bezeichnet man als Überspannung. Wir betrachten im folgenden Metallektroden Me in Elektrolytlösungen, welche Me^{z+} als durchtrittsfähiges Ion enthalten; ferner soll Konzentrationspolarisation in Elektrolyten experimentell von vornherein ausgeschlossen sein. Bekanntlich werden dann unter sonst gleichen Bedingungen feste Metallektroden meist um Größenordnungen stärker polarisiert als flüssige Elektroden (Quecksilber, Amalgame). Man hat diesen Unterschied schon seit langem auf den mit der

Elektrolyse fester Metallektroden einhergehenden Kristallwachstums- oder -abbauprozeß zurückzuführen versucht. In dieser Hinsicht sind besonders die Arbeiten von Volmer und Mitarb.¹ zu nennen, die bis in die jüngste Zeit² grundlegend blieben.

Um die bisherigen, auf zahlreiche vereinzelte Beobachtungen gestützten Vermutungen entweder sicherzustellen oder zu widerlegen, ist es notwendig, die möglichen Kristallisationseffekte theoretisch genauer zu analysieren. Ein Vergleich zwischen der z. Tl. schon vorliegenden, z. Tl. im folgenden weiterentwickelten Theorie und neuen experimentellen Befunden weist darauf hin, daß bei einigen

¹ H. Brandes, Z. phys. Chem. A **142**, 97 [1929]; T. Erdey-Gruz u. M. Volmer, Z. phys. Chem. A **157**, 165 [1931]; M. Volmer, Physik. Z. URSS. **4**, 346 [1933].

^{1a} M. Volmer, Das elektrolytische Kristallwachstum, Paris 1934.

^{1b} M. Volmer, Kinetik der Phasenbildung, Stein-kopff, Dresden 1939.

² Z. B. bei Fr. Müller, Z. Elektrochem. **43**, 812 [1937]; J. A. V. Butler, Electrocapillarity, London 1940, S. 168 f.; G. E. Gardam, Disc. Faraday Soc. **1**, 182 [1947]; H. Fischer, Z. Metallkde. **39**, 161 [1948]; J. A. V. Butler, Electrical Phenomena at Interfaces, London 1951, S. 200 f.; W. Lorenz, Z. phys. Chem. **202**, 275 [1953].